Mechanica & Relativiteit 2

3/5

Tentamen 14-04-2011.

1 (a) Elastistisch; behoud E_{kin}.

$$\frac{1}{2}m_1 v_{mp}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{sw}^2 = \frac{1}{2}m_1 u_{mp}^2 + \frac{1}{2}m_2 u_{sw}^2$$

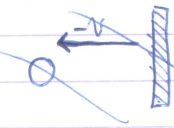
Starre wand $\rightarrow v_{sw} = u_{sw} = 0$.

Dus: $\frac{1}{2}m_1 v_{mp}^2 = \frac{1}{2}m_1 u_{mp}^2$

1 $\quad v_{mp} = u_{mp}$ $\qquad v_{mp} = \pm u_{mp} \longrightarrow v_{mp} = -u_{mp}$

De grootte van de snelheid is gelijk aan die van voor de botsing. De richting is omgekeerd, want de relatieve snelheden keren om.

~~(b) behoud impuls.~~ ~~In het frame van het massadeeltje~~ ~~$m_1 v_{x1} =$ komt de starre wand op hem af:~~



~~Omdat deze stoot is groot~~

~~Behoud impuls.~~

$$\cancel{0 + m_2 v_{sw} = m_1 u_{mp} + 0}$$

$$\cancel{u_{mp} = -\frac{m_2}{m_1} v_{sw}}$$

(b) ① Behoud kinetische energie. (Labframe)

1 ② Behoud impuls ~~(Labframe)~~ (CM)

③ Behoud impulsmoment. tov A. ~~(massa-middelpunt)~~ ~~↳ geen extern koppel (=0)~~

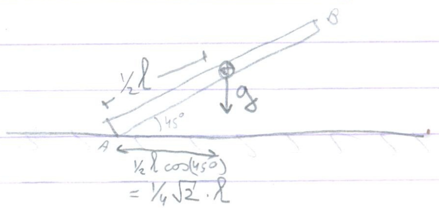
(c). ① Behoud E_{kin} geeft:

$$\frac{1}{2}m v_1^2 = \frac{1}{2}m u_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$I = \frac{1}{12}m l^2$$

1/3

De staaf zal gaan ~~by~~ roteren om het massamiddelpunt, terwijl deze onder invloed van de zwaartekracht zal blijven vallen.



~~③ Behoud impulsmoment.~~

$$\cancel{0 = Rm\, I\omega}$$

Behoud impulsmoment.

$L_{voor} = R \times p$

$R = \frac{1}{2} l \cos(45°) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\, l$

$p = m \cdot v_1$

$\frac{1}{4}\sqrt{2}\, \cancel{l} \cdot \cancel{m} \cdot v_1 = \frac{1}{3} \cancel{m}\, l^{\cancel{2}}\, \omega$

$\frac{1}{4}\sqrt{2}\; v_1 = \frac{1}{3}\omega l$

$\omega = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{2}\, v_1}{l}$

$L_{NA} = (I \cdot \cancel{\omega} + MR^2)\,\omega$

$= (\frac{1}{12} m l^2 + (\frac{1}{2} l)^2 \cdot m)\,\omega$

$= \frac{1}{3} m l^2 \omega$

E_{kin}

$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{24} m l^2 \omega^2$

$L_{voor} = L_{NA}$ tov. A

$m v_1 \frac{1}{4}\sqrt{2}\, l = m u_1 \frac{1}{4}\sqrt{2}\, l + I\omega$ met $I = \frac{1}{12} m l^2$!

$E_{kin_{voor}} = E_{kin_{NA}}$

$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

geeft $v_2 = v_1$ (vóór botsing) of $v_2 = \frac{v_1}{5}$

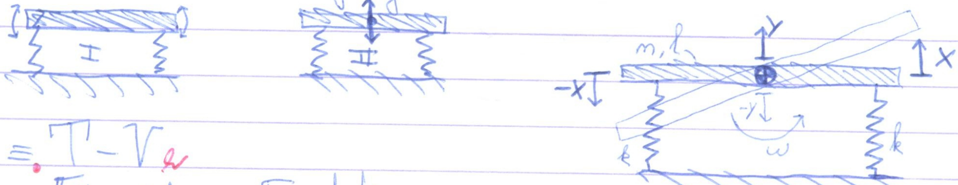
$\omega = \frac{12\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{v_1}{l}$

$4\frac{1}{2}$p $2/5$

2(a) Aangenomen dat de veren alleen verticaal kunnen bewegen, zijn er 2 vrijheidsgraden:

I De op en neer gaande bewegingen van de uiteinden van de balk.

$\frac{1}{2}$ 1 II De verticale beweging van het centrum van de balk.



(b) $\mathcal{L} \equiv T - V$

$T = E_{translatie} + E_{rotatie}$

$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$.

$\omega = \dot{\theta}$!

* $\omega \cdot \frac{1}{2} l \simeq \dot{x}$

2 $\omega \simeq \frac{2\dot{x}}{l}$ (voor kleine uitwijkingen in x gaat $\dot{x} \simeq$ verticaal)

* $I_{balk} = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \sigma \cdot dr = \frac{1}{3}\sigma \left[r^3 \right]_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} = \frac{1}{3}\sigma \left[\frac{1}{8} l^3 - -\frac{1}{8} l^3 \right] = \frac{1}{12} \sigma l^3 = \frac{1}{12} m l^2$

$dm = \sigma \cdot dr$ $\qquad m = \sigma \cdot l$

Dus: $T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m l^2 \cdot \left(\frac{2\dot{x}}{l}\right)^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{6} m \dot{x}^2$

V = veer-energie (deze "vangen" de zwaarte-energie ook op).

$V = \frac{1}{2} k (y+x)^2 + \frac{1}{2} k (y-x)^2$

$V = \frac{1}{2} k (y^2 + 2yx + x^2) + \frac{1}{2} k (y^2 - 2xy + x^2)$

$V = \frac{1}{2} k (2y^2 + 2x^2) = k (x^2 + y^2)$ $\qquad$ Even ..

Dus: $\mathcal{L} \equiv T - V = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{6} m \dot{x}^2 - k(x^2 + y^2)$.

$x = \frac{l}{2}\theta$

$\sin\theta = \frac{x}{\frac{l}{2}} \approx \theta = \frac{x}{\frac{l}{2}}$ $\qquad \dot{x} = \frac{l}{2}\dot{\theta}$

(c) I $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3} m \dot{x}\right) = \frac{1}{3} m \ddot{x} = -2kx = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)$

II $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m \dot{y}\right) = m \ddot{y} = -2ky = \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)$,

Dus: I

$$\frac{1}{3} m \ddot{x} + 2kx = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{6k}{m} x = 0$$
$$\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

II

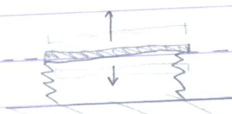
$$m\ddot{y} + 2ky = 0$$
$$\ddot{y} + \frac{2k}{m} y = 0$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

trillingsvormen:

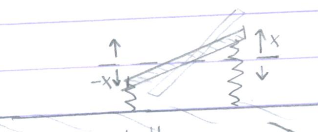
I $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{6k}{m}} + \phi_1\right)$

II $y = B\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} + \phi_2\right)$

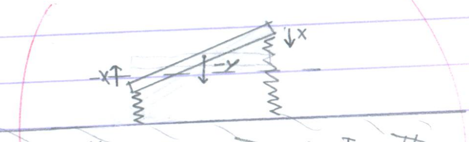
III $\omega_x = \sqrt{3}\,\omega_y$



trillingsvorm II
$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$



trillingsvorm I
$\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}$



trillingsvorm III : I + II
$\omega_x = \sqrt{3}\,\omega_y$

6p 3

3 (a) $I_x = \int (y^2+z^2)\cdot dm = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} y^2 \cdot dm$

$dm = \sigma \cdot dy$
$M = \sigma \cdot b$

1

$$I_x = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} y^2 \sigma \cdot dy = \tfrac{1}{3}\sigma \left[y^3 \right]_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} = \tfrac{1}{3}\sigma\left[\tfrac{1}{8}b^3 - -\tfrac{1}{8}b^3\right] = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\sigma\cdot b^3 = \tfrac{1}{12}Mb^2$$

$$I_y = \int (x^2+z^2)\,dm = \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} x^2\,dm = \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} x^2 \sigma\, dx = \tfrac{1}{12}Ma^2$$

$dm = \sigma \cdot dx$ $\qquad M = \sigma \cdot a$

$$I_z = I_x + I_y = \tfrac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

(b) Door de touwen wordt de zwaartekracht op geheven!
± Behoud impulsmoment.

$\vec{L} = \vec{R}\times\vec{P} = (I)\cdot\boldsymbol{\omega}$

$$(I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

$\vec{R} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{2}b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}$

$$\vec{R}\times\vec{P} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\cdot(-p)\cdot\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b \end{vmatrix} = -p\left(-\tfrac{1}{2}b\,\hat{\underline{x}} + \tfrac{1}{2}a\,\hat{\underline{y}}\right).$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}a \\ 0 \end{pmatrix}\cdot|P| = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(a^2+b^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

2 Snelheid massamiddelpunt $= u = \frac{-p}{M}$ (behoud impuls: $-p = M\cdot u$)

Dus:

$\frac{1}{12}Mb^2\omega_1 = \frac{1}{2}b\cdot P$

$\omega_1 = \frac{6P}{M\cdot b}$

$\frac{1}{12}Ma^2\omega_2 = -\frac{1}{2}a\cdot P$

$\omega_2 = \frac{-6P}{Ma}$

$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)\omega_3 = 0$

$\omega_3 = 0$

$$\omega = \frac{6P}{M}\begin{pmatrix} \frac{1}{b} \\ \frac{-1}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3

$$y \text{ (a) } (I) = \begin{pmatrix} \int y^2+z^2 & -\int xy & -\int xz \\ -\int yx & \int x^2+z^2 & -\int yz \\ -\int zx & -\int zy & \int x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

Er zijn alleen hoofdassen als het object in twee (!) of ~~3~~ meer vlakken symmetrie heeft, want in alle 6 integralen buiten de hoofdassen zit ofwel sowieso:

I een x of/en een y

II een x en/of een z

III een y en/of een z

Er zijn altijd (!) 3 hoofdrichtingen. Ze zijn echter pas eenvoudig te vinden als het lichaam symmetrieën bevat

onbegrijpelijk

Dus bij symmetrie in twee richtingen worden deze 6 integralen 0. Onjuist (Ieder object heeft wel een traagheidstensor)

(b) De methode van Lagrange is inderdaad equivalent aan Newton's $F=ma$. Want uit $F=m\cdot a$ kun je virtuele arbeid toepassen → stationaire actie introduceren → Lagrange afleiden. De behoudswetten hoeven niet expliciet worden toegevoegd om tot de bewegingsvergelijkingen te komen. Onjuist ✓

(c) Juist ; $L \equiv T - V$ hierin wordt niet gecorrigeerd voor wrijving. ✓

2/3

$$\text{tentamen} = \frac{\text{pnt}+1}{2} + 1 = \frac{15\frac{1}{2}+1}{2} + 1 = 9.25$$

max punten $5+5+6+3$

$EC = 0{,}9 * \text{tentamen} + 0{,}1 * \text{practicum} + 0{,}1 \text{ HW-bonus}$

⇝ 10.03 $\xrightarrow{\text{mogen geven}}$ 9.5